数理解析研究所講究録
第2083巻 2018年 156-166

項内に束縛関係を持つ一階述語論理の構成

東京工業大学 情報理工学院 中村 知己
Kazuki Nakamura
Department of Mathematical and Computing Science,
Tokyo Institute of Technology

東京工業大学 情報理工学院 鹿島 亮*1
Kashima Ryo
Department of Mathematical and Computing Science,
Tokyo Institute of Technology

1 はじめに

一階述語論理では $\forall, \exists$ によって, 論理式中の変数記号を束縛する. 一方で項について考えると, 一般に数学では総和記号 Σ や積分記号 $\int$ を使って表されるような項内に束縛関係を持つ項を考えるのに対し, 一階述語論理における項の定義はこのような項を許していない. 本研究の目的はこのような項を自然に表現できるように一階述語論理を拡張することである. また, 拡張体系と二階述語論理との関係について考察する.

本稿における通常の一階述語論理に関する記法や議論は主に文献 [1] に基づく.

2 構文論

2.1 言語と文法

本論文にて一階述語論理の言語は以下の記号を持つ.

変数記号 $x, y, z, \ldots$ で表す.
関数記号 $f, g, h, \ldots$ で表す.
束縛演算子記号 $F, G, \ldots$ で表す. (これが本稿で拡張されたものである)
述語記号 $p, q, \ldots$ で表す.
論理記号 $=, \bot, \wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \forall, \exists$
補助記号 $(,)$

関数記号, 述語記号には 1 つの, 束縛演算子記号には 2 つの, アリティと呼ばれる自然数 (0 を含む) がそれぞれ定まっており, 明示的にアリティを示す際には n-引数関数記号, n-引数述語記号 n, m-引数束縛演算子記号と呼ぶ. 特に 0-引数関数記号を定数記号と呼び c を使って表すことにする. 変数記号の集合を Var とする. また, 変数記号は可算無限個, その他の記号は高々可算個存在するものとする.

定義 2.1

*1 kashima@is.titech.ac.jp (代表著者)

項の定義を次のように拡張する.

$$T ::= x \mid f_n t_1 \cdots t_n \mid F_{n,m}(x(t_1 \cdots t_n)t'_1 \cdots t'_m)$$

ここで x は変数記号, f_n は n 引数関数記号, $F_{n,m}$ は n,m-引数束縛演算子とする.
また, $F_{n,m}(x(t_1 \cdots t_n)t'_1 \cdots t'_m)$ という形の項に対して, x を束縛変数記号, $t_1, ..., t_n$ を束縛項, $t'_1, ..., t'_m$ を自由項と呼ぶことにする.

項 $F_{n,m}(x(t_1 \cdots t_n)t'_1 \cdots t'_m)$ では束縛項 $t_1, ..., t_n$ が変数記号 x で束縛されており, 自由項 $t'_1, ..., t'_m$ は束縛されていない. 例えば, 総和 $\sum_{k=1}^{n}(k+c)$ は 1, 2-引数束縛演算子記号 Σ を用いて $\Sigma(k(k+c)1\ n)$ のように書く. 以下, 項を s, t 等を用いて表す.

定義 2.2
論理式を以下で定義する.

$$\varphi ::= \perp \mid t = s \mid pt_1 \cdots t_n \mid (\neg\varphi) \mid (\varphi \wedge \psi) \mid (\varphi \vee \psi) \mid (\varphi \to \psi) \mid (\forall x\varphi) \mid (\exists x\varphi)$$

以下, 論理式を φ, ψ, ρ を使って表す. また括弧については誤解の余地がない場合は省略する.

束縛演算子記号からなる項以外の項および論理式の束縛関係は通常通りである. 束縛演算子記号からなる項については以下のように定義する.

定義 2.3
t が $F(x(t_1 \cdots t_n)t'_1 \cdots t'_m)$ のとき $t_1, ..., t_n, t'_1, ..., t'_m$ の束縛出現および, $t'_1, ..., t'_m$ 以外に出現する x が t の束縛出現である.

項または論理式で束縛されていない変数の出現を自由出現といい, 項 t, 論理式 φ に対して, 束縛出現する変数の集合を $BVar(t), BVar(\varphi)$, 自由出現する変数の集合を $FVar(t), FVar(\varphi)$ と書く. 自由出現する変数記号が存在しない項や論理式を閉項, 閉論理式という.

定義 2.4
項 t または論理式 φ の変数記号 x に項 s が代入可能であるとは, t, φ の x の自由出現を項 s に書き換えた際に新たな束縛関係が生じないことをいう. 代入可能であるとき, 代入した結果を $t[s/x], \varphi[s/x]$ と書く.

2.2 演繹体系

束縛演算子記号の導入に対して, 演繹体系を拡張することを考える. 等号記号を含む自然演繹に対して束縛演算子記号に関する規則を加える.

$$\frac{\forall x(t_1 = s_1) \quad \forall x(t_2 = s_2) \quad \cdots \quad \forall x(t_n = s_n)}{F(x(t_1 \cdots t_n)t'_1 \cdots t'_m) = F(y(s_1[y/x] \cdots s_n[y/x])t'_1 \cdots t'_m)} \text{ (束縛代入)}$$

(ただし y は x であるか, $s_1, ..., s_n$ の x に代入可能かつ自由出現しない変数記号である)

(束縛代入) は総和記号 Σ の例で表すと

$$\text{任意の } x \text{ に対して } f(x) = g(x) \qquad \text{から} \qquad \sum_{x=1}^{n} f(x) = \sum_{y=1}^{n} g(y)$$

を導くような推論規則である.

また, 論理式の集合 Γ と論理式 φ について解消されていない仮定がすべて Γ の要素であるような φ の導出図が存在することを $\Gamma \vdash \varphi$ と書く.

3 意味論

3.1 ストラクチャー

この体系に対してのストラクチャーを以下のように定める.

定義 3.1
ストラクチャーとは以下の組である.
・対象領域 D 　(D の要素を個体と呼ぶ)
・関数記号 f 束縛演算子記号 F 述語記号 p の解釈 f^M、F^M, p^M

束縛演算子記号の解釈を除けば通常の古典論理のストラクチャーである. n,m-引数束縛演算子記号 F のストラクチャー M での解釈 F^M を考える. 例えば, 総和記号 Σ は束縛項の束縛変数に幾つかの整数を代入して得られた結果を足し合わせたものであるように一般に束縛項の束縛変数記号に複数の個体を代入したものを考える必要がある. すなわち束縛項の解釈は関数としての性質を持つべきであり, 束縛演算子記号の解釈は個体だけでなく, 関数を引数に取ることが求められる. そこで n,m-束縛演算子記号 $F_{n,m}$ の解釈 $F_{n,m}^M$ を以下のような関数とする.

$$F_{n,m}^M : (D \to D)^n \times D^m \to D$$

このように定義することにより, 束縛演算子の性質を満たすことができる.

項や論理式の解釈は, 個体それぞれを示す名前と呼ばれる定数記号を言語に加えることにより, 閉論理式や閉項についてのみ帰納的に定義する手法がある. しかしこの手法は束縛演算子を含む項を解釈するには適当ではない. 実際に $\Sigma(k(k+c)1\ n)$ の例において $k+c$ がある個体に解釈されたとすると, 束縛変数記号である k の情報が消えてしまい, $k+c$ を k についての関数と解釈することができない. これを解決するため, 文献 [2] で用いられる方法を採用する. **個体割り当て**という Var から D への写像を考え, ストラクチャーと個体割り当ての組によって項の解釈を定義することを考える. 以下個体割り当ては σ を使って表す.

項の解釈を定義する前に 1 つ準備をする.

定義 3.2
個体割り当て σ と $x \in Var, a \in D$ に対して, 個体割り当て $\sigma(x \to a)$ を以下のように定義する.

$$\sigma(x \to a)(y) = \begin{cases} a & (y = x) \\ \sigma(y) & (y \neq x) \end{cases}$$

これは個体割り当てについてある変数記号に対する割り当てを指定したものである. このとき明らかに以下の 2 つが成り立つ.

$$\sigma(x \to a)(x \to b) = \sigma(x \to b)$$

$$\sigma(x \to a)(y \to b) = \sigma(y \to b)(x \to a)$$

これらは今後断りなく用いることにする.
ストラクチャーとこの個体割り当てを用いて項の解釈を定義する.

定義 3.3
ストラクチャー M と個体割り当て σ に対する項 t の解釈 $M^\sigma(t) \in D$ を以下のように帰納的に定義する.

(1) $t = x$(x は変数記号) のとき，　$M^\sigma(x) = \sigma(x)$

(2) $t = ft_1 \cdots t_n$ のとき，　$M^\sigma(ft_1 \cdots t_n) = f^M(M^\sigma(t_1), ..., M^\sigma(t_n))$

(3) $t = F_{n,m}(x(t_1 \cdots t_n)t'_1 \cdots t'_m)$ のとき，

$$M^\sigma(F_{n,m}(x(t_1 \cdots t_n)t'_1 \cdots t'_m)) = F^M_{n,m}((M^\sigma_x(t_1), ..., M^\sigma_x(t_n)), (M^\sigma(t'_1), ..., M^\sigma(t'_m)))$$

ただし $M^\sigma_x(t)$ は任意の個体 a に対して $M^\sigma_x(t)(a) = M^{\sigma(x\to a)}(t)$ をみたす D 上の関数である．

項の解釈と同様にストラクチャー M と個体割り当て σ に対して論理式の解釈を定義する．

定義 3.4
ストラクチャー M と個体割り当て σ に対する論理式 φ の解釈 $M^\sigma(\varphi) \in \{True, False\}$ を以下のように定める

$$\begin{array}{rcl}
M^\sigma(\bot) = False & & \\
M^\sigma(t = s) = True & \Longleftrightarrow & M^\sigma(t) = M^\sigma(s) \\
M^\sigma(p_n t_1 \cdots t_n) = True & \Longleftrightarrow & p^M_n(M^\sigma(t_1), ..., M^\sigma(t_n)) \\
M^\sigma(\neg\psi) = True & \Longleftrightarrow & M^\sigma(\psi) = False \\
M^\sigma(\psi_1 \wedge \psi_2) = True & \Longleftrightarrow & M^\sigma(\psi_1) = True \text{ かつ } M^\sigma(\psi_2) = True \\
M^\sigma(\psi_1 \vee \psi_2) = True & \Longleftrightarrow & M^\sigma(\psi_1) = True \text{ または } M^\sigma(\psi_2) = True \\
M^\sigma(\psi_1 \to \psi_2) = True & \Longleftrightarrow & M^\sigma(\psi_1) = True \text{ ならば } M^\sigma(\psi_2) = True \\
M^\sigma(\exists x\psi) = True & \Longleftrightarrow & \exists a \in D \;\; M^{\sigma(x\to a)}(\psi) = True \\
M^\sigma(\forall x\psi) = True & \Longleftrightarrow & \forall a \in D \;\; M^{\sigma(x\to a)}(\psi) = True
\end{array}$$

このように定義された解釈に対して，モデルという概念と $\models$ の使い方を定義する．

定義 3.5
論理式の集合 Γ に対して，ストラクチャー M とその個体割り当て σ が存在して，任意の $\psi \in \Gamma$ に対して $M^\sigma(\psi) = True$ が成り立つとき，Γ はモデルを持つといい，この M, σ の組をモデルという．

定義 3.6
Γ を論理式の集合，φ を論理式とする．$\Gamma \models \varphi$ とは以下が成り立っていることをいう．

$$\Gamma\text{のすべてのモデル } M, \sigma\text{に対して } M^\sigma(\varphi) = True$$

3.2 意味論の性質

前節で定義した意味論に関するいくつかの性質を示す．すべて項や論理式の構成に関する帰納法により示せる．

定理 3.7
M を任意のストラクチャー，σ を M の任意の個体割り当てとする．

(1) 項 t と t に自由出現しない変数 x に対して以下が成り立つ．

$$\text{任意の個体 } a \text{ に対して } M^\sigma(t) = M^{\sigma(x\to a)}(t)$$

(2) 論理式 φ と φ に自由出現しない変数 x に対して以下が成り立つ．

$$\text{任意の個体 } a \text{ に対して}, M^\sigma(\varphi) = True \Longleftrightarrow M^{\sigma(x\to a)}(\varphi) = True$$

定理 3.8
M, σ を任意のストラクチャーとその個体割り当てとする．項 s に対して $M^\sigma(s) = a$ とする．

(1) 項 t について以下が成り立つ．

$$M^\sigma(t[s/x]) = M^{\sigma(x \to a)}(t)$$

(2) 論理式 φ について以下が成り立つ．

$$M^\sigma(\varphi[s/x]) = True \Longleftrightarrow M^{\sigma(x \to a)}(\varphi) = True$$

定理 3.9
M を任意のストラクチャー, σ を M の任意の個体割り当てとする．

(1) 項 t と t の x に代入可能な項 s_1, s_2 について以下が成り立つ．

$$M^\sigma(s_1) = M^\sigma(s_2) \text{ ならば } M^\sigma(t[s_1/x]) = M^\sigma(t[s_2/x])$$

(2) 論理式 φ と φ の x に代入可能な項 s_1, s_2 について以下が成り立つ．

$$M^\sigma(s_1) = M^\sigma(s_2) \text{ ならば, } (M^\sigma(\varphi[s_1/x]) = True \Longleftrightarrow M^\sigma(\varphi[s_2/x]) = True)$$

定理 3.10
M を任意のストラクチャー, σ を M の任意の個体割り当てとする．

(1) 項 t と t に自由出現しない変数記号 y および個体 a に対して以下が成り立つ．

$$M^{\sigma(x \to a)}(t) = M^{\sigma(y \to a)}(t[y/x])$$

(2) 論理式 φ と φ に自由出現しない変数記号 y および個体 a に対して以下が成り立つ．

$$M^{\sigma(x \to a)}(\varphi) = True \Longleftrightarrow M^{\sigma(y \to a)}(\varphi[y/x]) = True$$

4 健全性と完全性

4.1 健全性

定理 4.1 (健全性定理)
Γ を論理式の集合, φ を論理式としたとき以下が成り立つ．

$$\Gamma \vdash \varphi \Longrightarrow \Gamma \models \varphi$$

Proof.
$\Gamma \vdash \varphi$ のとき φ を導く証明図 $\mathcal{A}$ が存在する．$\mathcal{A}$ の大きさによる帰納法で示す．証明図の最後に使われた規則で場合分けを行う．
$\exists, \forall$ に関する規則と束縛代入以外については定理 3.9 より通常の NK と同様の方法で示せる．

($\exists I$) 帰納法の仮定より $\Gamma \models \psi[t/x]$ すなわち Γ のモデル M, σ に対して $M^\sigma(\psi[t/x]) = True$. $M^\sigma(t) = a$ とすると定理 3.8 より $M^{\sigma(x \to a)}(\psi) = True$ よって $M^\sigma(\exists x \psi) = True$ となり成立．

$(\exists E)$ このとき証明図は以下のような形になる.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ (\mathcal{A}_1)\\ \exists x\psi\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\psi[y/x]]\\ \vdots\ (\mathcal{A}_2)\\ \rho\end{array}}{\rho}\ (\exists E)$$

$\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \Gamma$ をそれぞれ $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ の解消されていない仮定の集合とする. $\mathcal{A}_1$ に関する帰納法の仮定より $\Gamma_1 \models \exists x\psi$. Γ のモデル M, σ について $M^\sigma(\exists x\psi) = True$ であり, このときある個体 a が存在して $M^{\sigma(x\to a)}(\psi) = True$ が成り立つ. 定理 3.10 より $M^{\sigma(y\to a)}(\psi[y/x]) = True$ が成り立つ. ここで y は Γ_2 の論理式に自由出現しないため定理 3.7 より $M, \sigma(y \to a)$ は $\Gamma_2 \cup \{\psi[y/x]\}$ のモデルである. $\mathcal{A}_2$ に関する帰納法の仮定より $M^{\sigma(y\to a)}(\rho) = True$ となり, y は ρ にも自由出現しないので $M^\sigma(\psi) = True$ が成り立つ.

$(\forall I)$ 解消されていない仮定の集合を Γ' とする. $\Gamma' \subset \Gamma$ であるから Γ のモデル M, σ は Γ' のモデルでもある. y は Γ' の論理式に自由出現しないため, 任意の個体 a について $M, \sigma(y \to a)$ は Γ' のモデルである. 帰納法の仮定より $M^{\sigma(y\to a)}(\varphi[y/x]) = True$ であり, 定理 3.10 より $M^{\sigma(x\to a)}(\varphi) = True$. $\forall$ の解釈に関する定義より $M^\sigma(\forall x\varphi) = True$ となり成り立つ.

$(\forall E)$ Γ のモデル M, σ について, 帰納法の仮定より $M^\sigma(\forall x\varphi) = True$ であり, 任意の個体 a に対して $M^{\sigma(x\to a)}(\varphi) = True$ が成り立つ. a は任意であるから $M^\sigma(t) = a$ とすると定理 3.8 より $M^\sigma(\varphi[t/x]) = True$ が成り立つ.

(束縛代入) Γ のモデル M, σ について, 帰納法の仮定より $1 \leq i \leq n$ となる任意の i について $M^\sigma(\forall x(t_i = s_i)) = True$. このとき任意の個体 a に対して $M^{\sigma(x\to a)}(t_i) = M^{\sigma(x\to a)}(s_i)$ となる. 定理 3.10 より $M^{\sigma(x\to a)}(s_i) = M^{\sigma(y\to a)}(s_i[y/x])$ であり, $M^{\sigma(x\to a)}(t_i) = M^{\sigma(y\to a)}(s_i[y/x])$ がいえる. a は任意であったので $M^\sigma_x(t_i)$ は $M^\sigma_y(s_i[y/x])$ と関数として等しい. このとき, 項の解釈の定義より, $M^\sigma(F(x(t_1 \cdots t_i \cdots t_n)t'_1 \cdots t'_m)) = M^\sigma(F(x(s_1 \cdots s_i \cdots s_n)t'_1 \cdots t'_m))$ すなわち

$$M^\sigma(F(x(t_1 \cdots t_n)t'_1 \cdots t'_m) = F(y(s_1[y/x] \cdots s_n[y/x])t'_1 \cdots t'_m)) = True$$

となる.

以上より健全性が示された. □

4.2 完全性

定理 4.2 (完全性定理)
Γ を論理式の集合, φ を論理式としたとき以下が成り立つ.

$$\Gamma \models \varphi \Longrightarrow \Gamma \vdash \varphi$$

本節ではこの完全性定理を証明していく. 証明手法として文献 [1] でなされている通常の一階述語論理に対する完全性の証明に対し, 束縛演算子記号に関する議論を加えることで行う. 束縛演算子記号以外については同じ議論となるため, 適宜証明は省略する.

まず, 論理式の集合に対して矛盾, 無矛盾という概念を定義する.

定義 4.3
論理式の集合 Γ に対し, $\Gamma \vdash \bot$ が成り立っているとき, Γ は**矛盾する**といい, そうでないとき Γ は**無矛盾**であるという

この矛盾の概念を用いて以下の定理を考える.

定理 4.4 (モデル存在定理)
Γ を論理式の集合としたとき以下が成り立つ.

$$\Gamma\text{が無矛盾} \Longrightarrow \Gamma\text{はモデルを持つ}$$

モデル存在定理から完全性定理を導けることが知られている. したがって, モデル存在定理を示せばよい.

文献 [1] に倣い, 変数集合 Var を自由出現する変数の集合 $\mathbb{F}$ と束縛出現する変数の集合 $\mathbb{B}$ を分けたものを考える. すなわち $\mathbb{F} \cap \mathbb{B}$ が空集合となっているものとする. ただし, $\mathbb{F}, \mathbb{B}$ はともに無限集合であるとする. 本節では以降, 項, 論理式の集合として以下で定義されるものを考える.

$$\mathrm{Term}_{\mathbb{F},\mathbb{B}} = \{t \mid FVar(t) \subset \mathbb{F}, BVar(t) \subset \mathbb{B}\}$$
$$\mathrm{Fomula}_{\mathbb{F},\mathbb{B}} = \{\varphi \mid FVar(\varphi) \subset \mathbb{F}, BVar(\varphi) \subset \mathbb{B}\}$$

$\Gamma \subset \mathrm{Fomula}_{\mathbb{F},\mathbb{B}}$ かつ Γ に自由出現しない $\mathbb{F}$ の要素が無限個存在するような Γ に対してモデル存在定理が示すことを目標とする.

モデルを構成するため, 極大無矛盾集合と呼ばれる集合を定義する.

定義 4.5
論理式の集合 $\Gamma \subset \mathrm{Fomula}_{\mathbb{F},\mathbb{B}}$ が**極大無矛盾集合**であるとは以下が成り立つことをいう.

- Γ は無矛盾
- 任意の $\varphi \in \mathrm{Fomula}_{\mathbb{F},\mathbb{B}}$ に対して, $\varphi \in \Gamma$ または $\neg\varphi \in \Gamma$
- 任意の $\exists x\varphi \in \Gamma$ に対してある項 $t \in \mathrm{Term}_{\mathbb{F},\mathbb{B}}$ が存在して $\varphi[t/x] \in \Gamma$

極大無矛盾集合の性質として以下の性質が知られている.

定理 4.6
Γ が極大無矛盾集合ならば以下が成り立つ.

$$\Gamma \vdash \varphi \Longleftrightarrow \varphi \in \Gamma$$

定理 4.7
Γ が極大無矛盾集合ならば以下が成り立つ.

$$\begin{array}{rcl}
\neg\psi \in \Gamma & \Longleftrightarrow & M^{\sigma}(\psi) \notin \Gamma \\
\psi_1 \wedge \psi_2 \in \Gamma & \Longleftrightarrow & \psi_1 \in \Gamma \text{ かつ } \psi_2 \in \Gamma \\
\psi_1 \vee \psi_2 \in \Gamma & \Longleftrightarrow & \psi_1 \in \Gamma \text{ または } \psi_2 \in \Gamma \\
\psi_1 \to \psi_2 \in \Gamma & \Longleftrightarrow & \psi_1 \notin \Gamma \text{ または } \psi_2 \in \Gamma \\
\exists x\psi \in \Gamma & \Longleftrightarrow & \exists s \in \mathrm{Term}_{\mathbb{F},\mathbb{B}} \ \ \psi[s/x] \in \Gamma \\
\forall x\psi \in \Gamma & \Longleftrightarrow & \forall s \in \mathrm{Term}_{\mathbb{F},\mathbb{B}} \ \ \psi[s/x] \in \Gamma
\end{array}$$

無矛盾な論理式の集合 $\Gamma \subset \mathrm{Fomula}_{\mathbb{F},\mathbb{B}}$ から $\Gamma \subset \Gamma^+$ となるような極大無矛盾集合 Γ^+ を構成する. $\mathrm{Fomula}_{\mathbb{F},\mathbb{B}}$ は可算集合であるため, 要素を順に並べて $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ とする. $\Gamma_0 = \Gamma$ とし, Γ_n を以下のように定義する.

$$\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n & (\Gamma_n \cup \{\varphi_{n+1}\} \text{ が矛盾する}) \\ \Gamma_n \cup \{\exists x\psi, \psi[y/x]\} & \left(\begin{array}{l} \Gamma_n \cup \{\varphi_{n+1}\} \text{ が無矛盾かつ} \\ \varphi_{n+1} \text{が } \exists x\psi \text{という形のとき} \end{array}\right) \\ \Gamma_n \cup \{\varphi_{n+1}\} & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

(ただし y は Γ_n にも $\exists x\psi$ にも自由出現しない $\mathbb{F}$ の変数記号である)

$\Gamma^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n$ とすることにより, 極大無矛盾集合が構成できる.

$\mathrm{Term}_{\mathbb{F},\mathbb{B}}$ に対して関係 $\sim$ を

$$t \sim s \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} t = s \in \Gamma^+$$

と定義し, この関係に対して同値類をとったものを対象領域 D とする. t を代表元とする同値類を $[\![t]\!]$ と表す. 束縛演算子記号以外の解釈は通常通り以下のように定める.

$$f^M([\![t_1]\!], ..., [\![t_n]\!]) := [\![f t_1 \cdots t_n]\!]$$

$$p^M([\![t_1]\!], ..., [\![t_n]\!]) = True \Longleftrightarrow p t_1 \cdots t_n \in \Gamma^+$$

これらは代入規則により, well-defined であることがいえる. [1]

このストラクチャーでの束縛演算子記号の解釈を考える. 束縛演算子記号の解釈は D 上の関数を引数に持つため, 関数を項で表すことができるかが重要である. 以下で項表現可能, 項表現という概念を導入する.

定義 4.8

$x \in \mathbb{B}$ とする. D 上の関数 g が x によって**項表現可能である**とは, $FVar(T) \subset \mathbb{F} \cup \{x\}$, $BVar(T) \subset \mathbb{B}$ となる項 T が存在して, 任意の $s \in Term_{\mathbb{F},\mathbb{B}}$ に対して以下を満たすことをいう.

$$g([\![s]\!]) = [\![T[s/x]]\!]$$

x によって項表現可能な g に対して, 上のような項 T を $T_{g,x}$ と書き, g の x による**項表現**と呼ぶ.

定義 4.9

このストラクチャー M での束縛演算子記号 F の解釈 F^M を次のように定める

$$F^M((g_1, ..., g_n), ([\![t'_1]\!], ..., [\![t'_m]\!])) = \begin{cases} [\![F(x(T_{g_1,x} \cdots T_{g_n,x}) t'_1 \cdots t'_m)]\!] & \left(\begin{array}{l} \text{ある変数記号 } x \text{ によって} \\ \text{すべての } g_i \text{が項表現可能のとき} \end{array}\right) \\ [\![y]\!] & \text{(otherwise)} \end{cases}$$

(ただし y は $\mathbb{F}$ のある変数記号である)

この定義が well-defined になっていることを示す. 自由項に関しては関数記号と同様に言える. 束縛項に関しては, 以下の定理を示せば良い.

定理 4.10

$T_{g_i,x}$ が g_i の x による項表現であり, $T'_{g_i,y}$ が g_i の y による項表現であるとき, 以下が成り立つ.

$$[\![F(x(T_{g_1,x} \cdots T_{g_n,x}) t'_1 \cdots t'_m)]\!] = [\![F(y(T'_{g_1,y} \cdots T'_{g_n,y}) t'_1 \cdots t'_m)]\!]$$

Proof.

$T_{g_1,x},\dots,T_{g_n,x}$, $T'_{g_1,y},\dots,T'_{g_n,y}$ に束縛出現する変数記号は有限であるから, これらに含まれていない $\mathbb{B}$ の変数記号 z が存在する. このとき z は $T_{g_1,x},\dots,T_{g_n,x}$ の x に代入可能であり, さらに $T'_{g_1,y},\dots,T'_{g_n,y}$ の y にも代入可能である. 以下の 3 つを示せば十分である.

$$[\![F(x(T_{g_1,x}\cdots T_{g_n,x})t'_1\cdots t'_m)]\!] = [\![F(z(T_{g_1,x}[z/x]\cdots T_{g_n,x}[z/x])t'_1\cdots t'_m)]\!] \tag{4.1}$$

$$[\![F(y(T'_{g_1,y}\cdots T'_{g_n,y})t'_1\cdots t'_m)]\!] = [\![F(z(T'_{g_1,y}[z/y]\cdots T'_{g_n,y}[z/y])t'_1\cdots t'_m)]\!] \tag{4.2}$$

$$[\![F(z(T_{g_1,x}[z/x]\cdots T_{g_n,x}[z/x])t'_1\cdots t'_m)]\!] = [\![F(z(T'_{g_1,y}[z/y]\cdots T'_{g_n,y}[z/y])t'_1\cdots t'_m)]\!] \tag{4.3}$$

(4.1) まず $\forall x(T_{g_i,x} = T_{g_i,x})$ は仮定なしで導けるため,

$$\Gamma^+ \vdash \forall x(T_{g_i,x} = T_{g_i,x})$$

となる. 定理 4.6 より,

$$\forall x(T_{g_i,x} = T_{g_i,x}) \in \Gamma^+$$

である. ここで z は $T_{g_i,x}$ の x に代入可能であったから, 束縛代入規則より,

$$\Gamma^+ \vdash F(x(T_{g_1,x}\cdots T_{g_n,x})t'_1\cdots t'_m) = F(z(T_{g_1,x}[z/x]\cdots T_{g_n,x}[z/x])t'_1\cdots t'_m)$$

が成り立ち, 定理 4.6 より

$$F(x(T_{g_1,x}\cdots T_{g_n,x})t'_1\cdots t'_m) = F(z(T_{g_1,x}[z/x]\cdots T_{g_n,x}[z/x])t'_1\cdots t'_m) \in \Gamma^+$$

となる. 同値類の定義より (4.1) が成り立つ. 同様にして (4.2) も示せる.

(4.3) $T_{g_i,x}, T'_{g_i,y}$ はそれぞれ g_i の x, y による項表現であることから, 任意の $s \in \mathrm{Term}_{\mathbb{F},\mathbb{B}}$ に対して,

$$[\![T_{g_i,x}[s/x]]\!] = [\![T'_{g_i,y}[s/y]]\!]$$

となる. ここで z は $T_{g_i,x}$ の x 及び $T'_{g_i,y}$ の y に代入可能であったから,

$$[\![T_{g_i,x}[z/x][s/z]]\!] = [\![T'_{g_i,y}[z/y][s/z]]\!]$$

すなわち,

$$T_{g_i,x}[z/x][s/z] = T'_{g_i,y}[z/y][s/z] \in \Gamma^+$$

となる. ここで, s は任意であったため, 定理 4.7(6) から,

$$\forall z(T_{g_i,x}[z/x] = T'_{g_i,y}[z/y]) \in \Gamma^+$$

が言える. これを用いることで束縛代入規則から,

$$\Gamma^+ \vdash F(z(T_{g_1,x}[z/x]\cdots T_{g_n,x}[z/x])t'_1\cdots t'_m) = F(z(T'_{g_1,y}[z/y]\cdots T'_{g_n,y}[z/y])t'_1\cdots t'_m)$$

が成り立つことがわかる. 定理 4.6 より

$$F(z(T_{g_1,x}[z/x]\cdots T_{g_n,x}[z/x])t'_1\cdots t'_m) = F(z(T'_{g_1,y}[z/y]\cdots T'_{g_n,y}[z/y])t'_1\cdots t'_m) \in \Gamma^+$$

よって同値類の定義より (4.3) が成り立つ. □

このストラクチャー M に対して, σ を, 「任意の $x \in \mathbb{F}$ に対して $\sigma(x) = [\![x]\!]$」が成り立つ任意の個体割り当てとする. この M, σ の組が Γ のモデルになっていることを示す. 以下 σ はこの条件をみたすものとする.

補題 4.11

$x_1, ..., x_n \in \mathbb{B}$ とする. $\mathrm{FVar}(s) \subset \mathbb{F} \cup \{x_1, ..., x_n\}$, $\mathrm{BVar}(s) \subset \mathbb{B}$ となる項 s について以下が成り立つ

$$M^\sigma(s) = [\![s^*]\!]$$

ただし * は $\sigma(x_i) = [\![t_i]\!]$ $(t_i \in \mathrm{Term}_{\mathbf{F},\mathbf{B}})$ としたときの代入 $[t_1/x_1][t_2/x_2]\cdots[t_n/x_n]$ を表す.

Proof.

s の構成に関する帰納法で示す. 束縛演算子記号以外の場合は省略する. 簡単のため 1,1-引数束縛演算子記号の場合を示す. まず, 束縛演算子を含む項の解釈の定義と帰納法の仮定から以下が成り立つ.

$$\begin{aligned} M^\sigma(F(x(t)t')) &= F^M(M^\sigma_x(t), M^\sigma(t')) \\ &= F^M(M^\sigma_x(t), [\![t'^*]\!]) \end{aligned}$$

ここで $M^\sigma_x(t)$ について考える. * から x に関する代入を除いたものを $^{*-}$ とすると, 任意の $a \in \mathrm{Term}_{\mathbf{F},\mathbf{B}}$ に対して, 以下が成り立つ.

$$\begin{aligned} M^\sigma_x(t)([\![a]\!]) &= M^{\sigma(x \to [\![a]\!])}(t) \\ &= [\![t^{*-}[a/x]]\!] \qquad (\because \text{帰納法の仮定}) \end{aligned}$$

よって, t^{*-} は $M^\sigma_x(t)$ の x による項表現となっている. したがって,

$$\begin{aligned} M^\sigma(F(x(t)t')) &= F^M(M^\sigma_x(t), [\![t'^*]\!]) \\ &= [\![F(x(t^{*-})t'^*)]\!] \\ &= [\![(F(x(t)t'))^*]\!] \end{aligned}$$

となる. したがって $M^\sigma(s) = [\![s^*]\!]$ が成り立つ. □

補題 4.12

論理式 $\varphi \in \mathrm{Formula}_{\mathbf{F},\mathbf{B}}$ について以下が成り立つ.

$$\varphi \in \Gamma^+ \iff M^\sigma(\varphi) = True$$

Proof.

φ の構成に関する帰納法で示す.

(i) φ が $\bot$ のときは明らか.

(ii) φ が $t = s$ のとき, $t = s \in \Gamma^+ \iff [\![t]\!] = [\![s]\!]$. 補題 4.11 よりこれは $M^\sigma(t) = M^\sigma(s)$ と同値であり, すなわち $M^\sigma(t = s) = True$ と同値である

(iii) φ が $pt_1 \cdots pt_n$ のとき,

$$\begin{aligned} pt_1 \cdots pt_n \in \Gamma^+ &\iff p^M([\![t_1]\!], ..., [\![t_n]\!]) = True \\ &\iff p^M(M(t_1), ..., M(t_n)) = True \qquad (\because \text{補題 4.11}) \\ &\iff M^\sigma(pt_1 \cdots pt_n) = True \end{aligned}$$

(iv) φ が $\neg\psi, \psi_1 \vee \psi_2, \psi_1 \wedge \psi_2, \psi_1 \to \psi_2$ のいずれかの形のとき, 定理 4.7 と帰納法の仮定から簡単に示せる.

(v) φ が $\forall x\psi$, $\exists x\psi$ のいずれかの形のとき, まず, $\forall x\psi$ について考えると, 定理 4.7 と帰納法の仮定より

$$\forall x\psi \in \Gamma^+ \iff \text{任意の項 } t \in \mathrm{Term}_{\mathbb{F},\mathbb{B}} \text{に対して} \psi[t/x] \in \Gamma^+ \tag{4.4}$$
$$\iff \text{任意の項 } t \in \mathrm{Term}_{\mathbb{F},\mathbb{B}} \text{に対して}, M^\sigma(\psi[t/x]) = True \tag{4.5}$$

となる. (4.5) のとき, 任意の個体 a はある項 $t \in \mathrm{Term}_{\mathbb{F},\mathbb{B}}$ を使って $[\![t]\!]$ と表わせ, 補題 4.11 より $M^\sigma(t) = [\![t]\!]$ であるから, 定理 3.8 より

$$\text{任意の個体 } a \text{ に対して } M^{\sigma(x \to a)}(\psi) = True \tag{4.6}$$

が成り立つ. 逆に (4.6) のとき, 任意の項 t は解釈はある個体となるため, 定理 3.8 より (4.5) が成り立つ. よって (4.5) と (4.6) は同値である. (4.6) は $\forall$ に関する定義より, $M^\sigma(\forall x\psi) = True$ と同値であるため, 題意を示せた. $\exists x\psi$ のときも同様に示せる.

□

$\Gamma \subset \Gamma^+$ であるため補題 4.12 よりこの M, σ は Γ のモデルである. 以上よりモデル存在定理がいえ, 完全性定理が示せた.

5 考察

本稿では, 一階述語論理の拡張として, 項の内部で項を束縛するような体系を構成した. これの発展として項の内部で論理式を束縛する体系も同様に構成し, 健全性と完全性が示せるだろう. これらの体系は, 関数や個体集合を受け取り個体を返す関数を含むため, ある種の二階述語論理だと解釈できる. 二階述語論理では standard semantics と Henkin semantics の 2 つの意味論が知られている (文献 [3] などを参照). 本稿の議論では, 項表現可能という概念を用いて, 定義 4.9 の様にストラクチャーを構成している. 項表現できない関数については適当な解釈を与えているため, この体系は standard semantics に対しても完全であるといえるだろう.

参考文献

[1] 鹿島亮 ,「数理論理学」朝倉出版, 2009

[2] 森田茂行, 「論理学: 意味とモデルの理論」 東京電機大学出版局, 1999

[3] Väänänen, Jouko. "Second-order logic and foundations of mathematics." Bulletin of Symbolic Logic 7.4 (2001): 504-520.